

GPSの基礎

Elements of the Global Positioning System

1 はじめに

地球周回衛星群を含む巨大な宇宙システムであり、現在の我々の生活に密着して役立っている GPS を紹介する。GPS のシステム構成、時系、座標系、座標変換、衛星軌道等の理論および信号伝播時間と最小 2 乗法による衛星測位の基本原理について記述する。

2 GPS の概要

2.1 GPS の構成

GPS(Global Positioning System)とは、全世界測位衛星システムと訳され、複数の衛星からの測距情報を同時に受信することにより、陸海空および宇宙のあらゆる移動体や乗り物に対して、全天候、全世界、実時間の 3 次元測位（位置・速度の測定）を可能にするシステムである。元々は船舶や航空機の航法誘導など軍用のために計画・開発されたが、現在では、車のカーナビゲーションや土木測量など、民間でも広く使用されている。平成 11 年 9 月現在、利用可能なシステムは米国防総省 DoD(Department of Defense)が開発した NAVSTAR/GPS およびロシアの GLONASS である。最近では欧州を中心として、より高性能高機能かつ民間利用を目指した GALILEO、日本では準天頂衛星を用いた測位システムが計画されている。本実験では米国の NAVSTAR/GPS(Navigation System with Time and Ranging/GPS)を使用する。普通、GPS と言えば米国のシステムを指す。

GPS は、宇宙部分、地上制御部分、利用者部分によって構成されている。

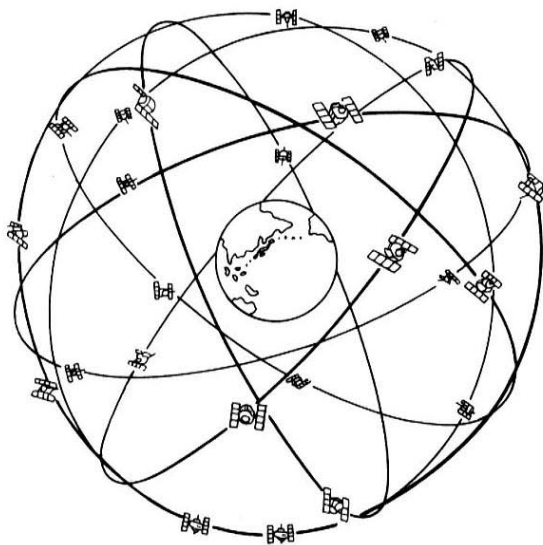
宇宙部分(space segment)は、図 2.1 に示すように、高度 20,200 km、傾斜角 55 度、周期 12 時間の円軌道を周回する GPS 衛星（6 軌道面に 4 機ずつ配置、24 機以上で運用）からなる。GPS 衛星は、利用者が世界中のどこでもいつでも少なくとも 4 機の衛星が利用できるように最適配置され、常に自分の位置と時刻などの航法メッセージを利用者に送信している。

地上制御部分(control segment)は、米国コロラドスプリングスにある主制御局と、世界中に配備された 5 つのモニタ局(Hawaii, Kwajalein, Ascension , Diego Garcia, Colorado Springs)、3 つの地上アンテナ (Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein)からなる。モニタ局は視界にある全ての GPS 衛星を追跡し、衛星から送信される測距情報を収集する。モニタ局は各々収集したデータを主制御局に送り、主制御局はそのデータを基に衛星軌道を非常に正確に決定する。その情報は更新航法メッセージとして、地上アンテナを通してそれぞれの衛星に通常 1 日に 1 回送信される。この地上アンテナは衛星の制御信号やモニタ信号の送受信も行っている。

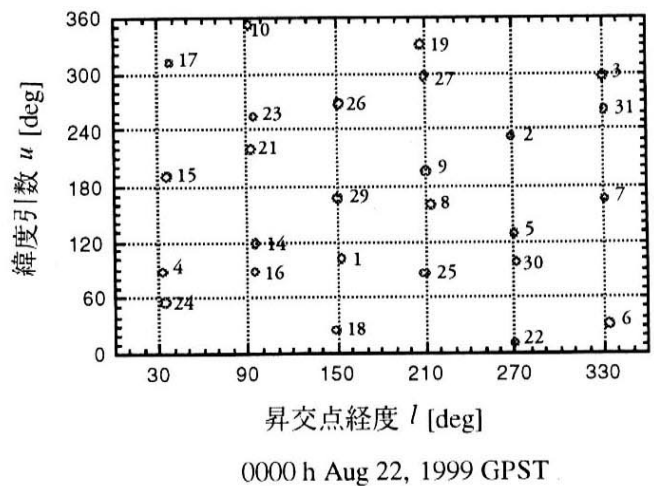
利用者部分(user segment)は、受信機、プロセッサ、アンテナからなり、それを用いて陸海空の利用者が GPS 衛星放送を受信し、正確な位置、速度そして時刻を計算する。利用者の地球上における位置を決定するには、軌道上の複数の GPS 衛星と利用者との間の距離を用いる。そこでは衛星は正確な基準点の役割をする。それぞれの GPS 衛星は自分の正確な位置と時刻を乗せた信号を送信し、利用者は受信機でその信号が衛星から受信機に届くまでの時間遅れ（信号伝播時間）を測定する。この信号伝播時間と伝播速さ（= 光速）の積をとり、衛星までの見かけの距離（擬似距離）を得る。この測定は同時に 4 機以上の衛星について行われ、3 次元の位置、速度および時刻の計算に使用される。

この GPS 計画を DoD が発表したのは 1973 年であり、最初の GPS 衛星である Block I

(845kg, 全 11 機, 内 1 機打ち上げ失敗, 現在全て使用終了)を打ち上げ始めたのは 1978 年、運用衛星である Block II (1500 kg 以上, 約 5 千万ドル/機, 全 9 機)は 1989 年から、1990 年からの Block IIA (全 19 機)打ち上げを経て、24 機そろったのは 1993 年 6 月である。GPS は 1995 年 7 月 17 日から全運用機能が保証されている。1997 年 7 月に打ち上げられた Block IIR 衛星を含み、2002 年 9 月現在、28 機の衛星が稼働している。この間、30 年間に渡って巨額な資金と膨大な人員をつぎ込み、研究、開発、実装が行われ、様々な経緯を経て現在の姿に至っている。このため、GPS の発案と開発の主導者を特定し難く、GPS そのものや測量の理論が複雑となっている。GPS 測量機の開発についても製造会社間で熾烈な競争があった。現在でも性能向上を目指して、周波数の L1 から L5 への変更、新型機 Block III の開発が検討されている。表 2.1 に GPS 衛星の主要諸元を示す。GPS 衛星は通常 PRN 番号で識別される (PRN については後述する)。



(a) GPS 宇宙部分 (群衛星)



(b) GPS 衛星の配置

図 2.1 GPS 衛星

表 2.1 GPS 衛星の主要諸元

通称: NAVSTAR/GPS	軌道面数: 6 面 (1 面に 4 衛星ずつ配置)
運用総数: 24	軌道傾斜角: 55 deg
軌道形状: 円 (離心率 約 0.005)	昇交点赤径: 60 deg 間隔
軌道高度: 約 20,200 km	軌道面記号: A, B, C, D, E, F
周回周期: 約 11 時間 58 分 02 秒 (0.5 恒星日)	
測位波電波: L1 帯(1575.42 MHz) C/A 480 W (EIRP(equivalent isotropic radiated power))	
	P(Y) 240 W 輻射電力、送信機の出力にアンテナ利得を乗じた値)
L2 帯(1227.6 MHz) P(Y) 81 W	
基準発信器: 10.23 MHz-0.00455 Hz	セシウム原子周波数標準 (原子時計) 2 台 安定度 $10^{-14} \sim 10^{-13}$
	ルビジウム原子周波数標準 2 台 予備水晶発振器
送信アンテナ: 12 素子ヘリカルアンテナ (衛星直下よりも周辺により強く放射する成形ビームアンテナ))	

2.2 GPS のサービス

GPS は軍関係者利用のための精密測位業務 PPS(Precise Positioning Service)と一般利用者用の標準測位業務 SPS(Standard Positioning Service)の 2 種類のサービスを提供している。

PPS の測位精度は、少なくとも水平方向に 22 m (2 drms, 95%)、垂直方向に 27.5 m (95%)とされる。ここで、drms (distance root mean square)とは、測定距離の平均値との差の 2 乗の平均に平方根を取った量(rms)で、GPS では共通の指標として使用される。その 2 倍(2 drms)を半径とする円内には少なくとも 95%の確率で真値が存在する。PPS は同時に米国海軍天文台 USNO(U.S. Naval Observatory)が管理する協定世界時 UTC(Coordinated Universal Time) (UTC(USNO)と書く)を 200 nsec (95%)以内で提供する。速度推定精度は 0.2 m/sec (95%)である。

PPS は主に軍用および特に選ばれた政府機関利用者へ開放され、民生利用のためには DoD の特別の許可を必要とする。この PPS 精度は A-S (Anti-spoofing)と SA (Selective Availability)と呼ばれる 2 種類のコード操作によって制御されている。元来軍用である PPS のアクセスコードが民間に流布してしまい、DoD に無断でアクセスする利用者への対応策として A-S が付加されている。SA は衛星の時計を意図的に揺らがせ、その結果、信号伝播時間の測定精度を低め、さらに、送信される航法データパラメータにも誤差を含ませる。これは、民間用の測位精度が計画段階で予想された以上に高かったために、米国の国家安全保障上危機感を抱いた DoD によって Block II 以降採用された。PPS 利用者はこの影響を除去するコードを入手できる。

SPS は全ての GPS 利用者に対し連続的世界的な測位、時刻測定を無料で提供する。上に述べた SA 下での測位精度は、水平方向に 100 m (2 drms, 95%)、垂直方向に 156 m (95%)で、時刻決定精度は 340 nsec (95%)以内とされる。測位誤差のほとんどは SA の影響であり、SA オフ時の SPS による測位精度は 20 ~ 40m となる。SA 誤差は単独測位では除去できないが、後述の DGPS(Differential GPS)によって、その大部分を除去できる。更なる高精度の測位精度を得るために、DGPS の他に搬送波の位相情報を利用するキネマティック測位、実時間キネマティック測位(RTK)など様々な測位方法が考案され使用されている。表 2.2 に GPS の利用形態、表 2.3 に GPS の利用分野を示す。SA に関しては、一部の地域のみ SA を実施する技術を開発が進められ、時の米国政府は世界情勢を鑑み米国 GPS 戦略を推進する目論みもあり 2000 年 5 月 2 日に SA を全面的に解除した。

表 2.2 GPS の利用形態

- 1) 単独測位 (実時間運用可能)
 - (1) C/A コード利用 (精度 30m, SA オフ); L1 帯 1 波のみ受信
 - (2) P(Y)コード (軍用) 利用 (精度 16m); L1 帯, L2 帯 2 波の受信
 - (3) Doppler 測定 (精度数 cm/s); L1 帯 1 波, L1, L2 帯 2 波の両モード可能
速度ベクトルの測定
- 2) 相対測位
 - (1) DGPS (差分 GPS): 複数点における単独測位 (実時間運用可能)
C/A コード利用 (精度 2 ~ 3m), P(Y)コード利用 (精度 ~ 1m)
 - (2) 干渉測位 (GPS 測量)(L1 帯, L2 帯とも利用可能)
搬送波位相の測定
 - (イ) static 測位 (動的干渉測位)(精度 ~ 1cm, 後処理)
 - (ロ) rapid static 測位 (高速静止)(精度 ~ 3cm, 後処理)
 - (ハ) 疑似 kinematic 測位 (精度 ~ 3cm, 後処理)
 - (ニ) kinematic 測位 (stop and go)(精度 ~ 3cm, 後処理)
 - (ホ) 実時間 kinematic 測位 (精度 ~ 3cm, 実時間処理)
 - (ヘ) その他

表 2.3 GPS の利用分野

1) 単独測位の利用

宇宙利用：人工衛星、ロケットの自律的軌道追跡、一部の地上追跡網の簡素化（低高度衛星での利用に限定）

民間利用：船舶、漁船の航法、作業船の位置決定（既存の電波航法装置のほとんどが不要）、列車、トラック、タクシー、各種作業車などの運行管理（無線で現在位置を自動的に本部に知らせる）、土地、地形、植生、災害などの調査、民間航空での利用は試験段階（GPS 故障時の対応に問題）

軍事利用：作戦の効率化、砂漠、ジャングルなどでの行動の確実化、航空機、艦船の航法、ミサイルの誘導（潜水艦での利用は不可）

2) DGPS の利用

宇宙利用：宇宙飛翔体のランデブードッキング（低高度衛星での利用に限定）、スペースシャトル航法誘導の全運用段階（打ち上げ、軌道上、再突入、着陸）（予定）、国際宇宙ステーションの制御、データ収集、航法誘導

民間利用：船舶の接岸、海洋作業船の精密位置決定、航空機の自動離着陸（試験段階）、土地、地形、植生、災害などの調査

軍事利用：航空機、艦船の精密航法、ミサイルの精密誘導

3) GPS 測量（干渉測位）の利用

基準点測量（特に長距離測量に有効）、公共測量（低位級には有利とはいえない）、地籍測量（都市部では電波障害）、工事測量（工事現場の基本的な測量、逆打ち測量、土盛り、切取り工事の土量の管理など）、構造物の変形観測（ダム、橋梁などの変形連続測定）、地球物理観測、科学技術目的への利用（地殻変動観測、地震予知、火山噴火予知、地球回転観測、人工衛星追跡局の位置決定、低軌道宇宙機の姿勢決定）

4) 時刻同期機能の利用（通常の目的には過剰性能）

国家標準時の維持（原子時計の管理）、国際原子時の運用（原子時計の国際比較）、精密科学技術への利用（人工衛星追跡局の精密時刻同期など、在来の国内での同期精度に比べて一桁以上の改善）、船舶などでの時刻合わせ（過剰性能）

2.3 GPS の電波信号

GPS で使われる電波信号（GPS 信号）は、1) 電波の伝播時間から距離を測定するために、現在受信している GPS 信号の衛星送信時刻を利用者側が取得可能なこと、2) 4 つ以上の衛星との距離を同時に測定するために、混信せずに各衛星からの GPS 信号を利用者が受信可能なこと、3) 時々刻々の衛星位置を利用者が計算するために、衛星位置に関する情報を GPS 信号に乗せて送信可能なことなどの要求を満足するように PRN コードと航法メッセージと呼ばれる 2 つのコードで搬送波を PSK(Phase Shift Keying)変調することによって生成される。

GPS 衛星は基準周波数を $f_0 = 10.23 \text{ MHz}$ として 2 つの L 帯周波数の電波を送信する。即ち、 $L1 = 154 f_0 = 1575.42 \text{ MHz}$ （波長 19 cm）と $L2 = 120 f_0 = 1227.6 \text{ MHz}$ （波長 24.4 cm）である。（実際には、軌道上の重力に対応した相対論補正により基準周波数は $f_0 = 10.23 \text{ MHz} - 0.00455 \text{ Hz}$ で送信される。）その信号には 3 種類の疑似乱数コード PRN (pseudo-random noise) が用いられる。PRN コードは乱数的に 0 と 1 が現れる不規則なコード（M 系列）であり決まった長さで同じパターンを繰り返す。C/A (coarse/acquisition) コードはチップレート（ビットレート）が $f_0 / 10 = 1.023 \text{ MHz}$ ，チップ長 293.26 m，周期が 1 ms で、主に粗い距離測定と P コードを取得するのに使用される。この C/A コードの詳細は一般に公開されている。一方、P (precision) コードはレートが $f_0 = 10.23 \text{ MHz}$ ，チップ長 29.326 m、周期が 7 日間の精密測距用コードである。この P コードは元々は機密扱いであったが、先述のようにその内容が民間に漏れて代わりに Y コードに切り換えられた。Y コードは W コード ($f_0 / 20 = 0.5115 \text{ MHz}$) と呼ばれる機密扱いの疑似乱数コードを P コードに加算したもので、A-S が実行されるときに P コードの代わりに使用される。C/A コードは L1，P コードは L1 と L2 の両方の電波に乗せられる。様々な衛星は全て同じ周波

数である L1 帯と L2 帯の 2 波を送信するが、それぞれ独自の擬似乱数 PRN(pseudo random number)コードが割り当てられている。それに対応した番号(自然数)を PRN と呼び衛星の識別番号として用いられる(2000 年 9 月現在では 1-31 のうち 28 個の数を使用している)。PRN コードは決まった周期パターンからなるので、現在受信している信号が全体のパターンのどの位置に当たるかを利用者は知ることができる。この結果、送信側でコードの送り出しのタイミングを規定しておけば、現在受信している信号がいつ衛星から送信されたかがわかる。これはコードの 1 ビットあたりの長さ(チップ長)が短いほど精度よくわかるので、C/A コードよりも P(Y)コードの方が精度はよい。また、信号が疑似乱数で変調されて広い周波数帯域に拡散され、その信号電力がほとんど雑音の中に埋もれるので、信号の混信を避けることができる。これをスペクトル拡散通信と呼び、多重通信、隠匿性に優れている。受信機が特定の衛星からの GPS 信号を受信するためには、その衛星から送信される GPS 信号と同じ PRN コードをもう一度掛け合わせ、信号電力の拡散効果を取り除くという逆拡散と呼ばれる方法により可能になる。この結果、広い帯域に拡散されていた信号電力は極めて狭い帯域に戻され、信号捕捉を可能にする。図 2.2 に以上の過程、図 2.3 に L1 帯の電波スペクトル、図 2.4 に PRN コードの逆拡散を示す。

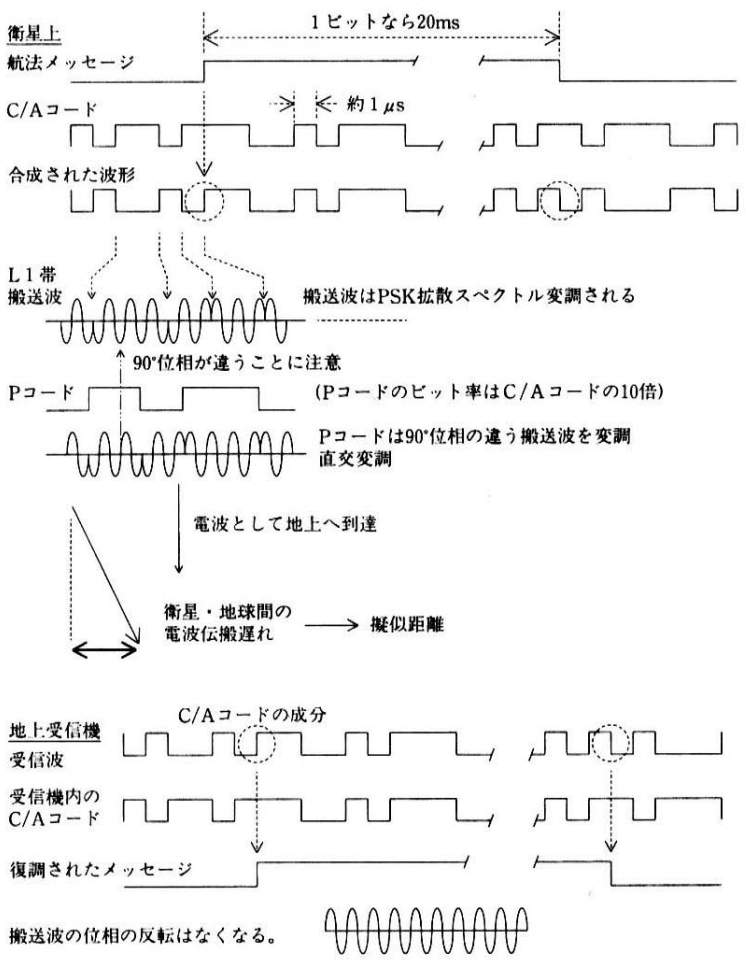


図 2.2 コード、航法メッセージ、搬送波の関係

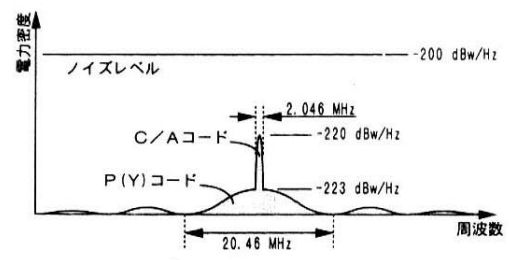


図 2.3 L1 帯の電波スペクトル

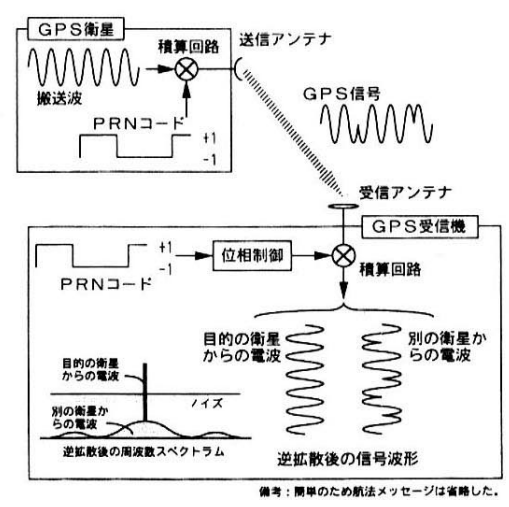


図 2.4 PRN コードの逆拡散

利用者が GPS を使って航法を行うためには、各衛星の軌道情報、衛星時計の補正值、電離層伝搬遅延の補正係数、衛星の健康状態（故障の有無）などの情報が必要である。航法メッセージは、そのための情報で、PRN コードと同様、搬送波を変調して常時 $f_0/204600 = 50 \text{ Hz}$ のチップレートで送信されている。航法メッセージに含まれている衛星の軌道情報から計算される放送暦(broadcast ephemeris)の他に、天体暦(almanac)と呼ばれる全 GPS 衛星の概略の軌道情報も送信されている。利用者はこの天体暦から衛星配置の概略を知り衛星の選択や切り換えなどに備える。

3 基準系

自分の位置と時刻を決定するためには、衛星と受信機の状態を表現できる基準となる座標系と時系を選択する必要がある。ここでは GPS に関連する事項について簡単に記す。

3.1 時系

時系 (time system) とは、地球の自転、天体の運動、原子や分子の量子力学的な振動などの自然現象を時間測定のための目盛りとして利用し時刻と時間を定義する体系のことである。時系には、世界時、力学時、国際原子時、協定世界時、GPS 時がある。

世界時 UT (Universal Time) とは、地球の自転に準拠した時系のこと、地球の極運動を補正した UT1、季節変動を補正した UT2 がある。力学時 TD (Dynamical Time) とは月や地球など天体の公転を基に一般相対論を用いて定義された時系であり、地球中心に準拠した地球力学時 TDT (Terrestrial Dynamical Time)、太陽中心に準拠した太陽系力学時 TDB (Barycentric Dynamical Time) がある。この時系の前身となったニュートン力学に基づいた時系を歴表時 ET (Ephemeris Time) と呼ぶ。

国際原子時 TAI (International Atomic Time) は、セシウム原子のエネルギー遷移によるスペクトル線の周波数を基準にする時系で、世界各国のセシウム時計の平均値を取って定義される。均一な時の流れを提供し現在の時間の基準となるものである。各国の時計相互の比較により平均値を取るため、現在では後述する GPS 比較技術を用いて行われる。

協定世界時 UTC (Coordinated UT) とは、地球回転に基づく UT1 と国際原子時 TAI の妥協的時系であり時差の違いはあるが我々が日常使っている時刻である。ちなみに日本標準時 JST (Japan Standard Time) は UTC より 9 時間進んでいる ($UTC - JST = -9 \text{ h}$)。秒の間隔は TAI を用いるが、地球の自転が一般的に減速しているために TAI は UT1 に比較し進んでしまう。そのため閏(うるう)秒 (leap seconds) を用いて UTC の秒を調整し UT1 と 0.9 秒以上ずれないようにしている。普通は年始めに閏秒の挿入 (地球自転が増速すれば削除) が行われる。1999 年 1 月 1 日に 22 回目の閏秒の挿入が実施され、2002 年 9 月現在、協定世界時は国際原子時よりも 32 秒遅れている ($UTC - TAI = -32 \text{ s}$)。

GPS 時 GPST (GPS Time) は、全世界測位衛星システム GPS (Global Positioning System) 衛星内のセシウム原子時計と地上施設の原子時計を総合して管理される時系であり時間刻みは 100ns 程度の小さな誤差を無視すれば国際原子時 TAI と同一である。但し GPST は 1980 年 1 月 6 日 (日) 0 時 UTC に開始したので、その時の UTC と TAI の差である 19 秒の遅れがある ($TAI - GPST = 19 \text{ s}$)。GPST と UTC との差は閏秒の挿入と共に増加し 2002 年 9 月現在、GPST は UTC よりも 13 秒進んでいる ($UTC - GPST = -13 \text{ s}$)。また相対論効果の補正のため TAI に比べ原子周波数標準を約 4×10^{-10} の割合だけ低い周波数で設定されている。GPST は GPS すべてにおける時刻基準であり GPS 衛星の軌道歴と搭載時計の誤

差は GPST を用いて計算される。GPST は週始めからの通し秒数であり日曜日 0 時にリセットされ 0 秒から開始される。衛星から放送される時刻は真の GPST に対し僅かながらドリフトするので、GPS 衛星から放送される航法メッセージに補正データを含んでいる。

3.2 暦

ユリウス日 JD(Julian Date)とは紀元前 4713 年 1 月 1 日正午から数えた平均太陽日であり、MJD(Modified Julian Date)とは JD から 2400000.5 を引いた日である。この変換は桁数を減じ、普通の暦日のように始まりを真夜中にするためである。表 3.1 を参照せよ。

表 3.1 暦の例

UTC	JD	MJD	備考
1980 年 1 月 6 日	2 444 244.5	44 244.0	GPS 基準元期
2000 年 1 月 1 日正午	2 451 545.0	51 544.5	WGS-84 基準元期(J2000.0)

1900 年 3 月から 2100 年 2 月まで有効である暦変換式を示す。通常日の年、月、日を整数 Y, M, D 、時刻を実数 UT で表すと、JD への変換は次式

$$JD = \text{INT}[365.25y] + \text{INT}[30.6001(m+1)] + D + UT/24 + 1720981.5 \quad (3.1)$$

で計算できる。但し、 $\text{INT}[\]$ は実数 $[\]$ の整数部分であり、実数 y, m は

$$\begin{aligned} y = Y - 1, m = M + 12 & \quad \text{if } M \leq 2 \\ y = Y, m = M & \quad \text{if } M > 2 \end{aligned}$$

と計算する。逆変換に関しては、まず次式を順に計算して、

$$\begin{aligned} a = \text{INT}[JD + 0.5], b = a + 1537, c = \text{INT}[(b - 122.1)/365.25] \\ d = \text{INT}[365.25 c], e = \text{INT}[(b - d)/30.6001] \end{aligned}$$

通常日は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} D = b - d - \text{INT}[30.6001 e] + \text{FRAC}[JD + 0.5] \\ M = e - 1 - 12 \text{ INT}[e/14] \\ Y = c - 4715 - \text{INT}[(7 + M)/10] \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 $\text{FRAC}[\]$ は実数 $[\]$ の小数部分である。曜日も 7 を法とする算法を用いて、

$$N = \text{mod}\{\text{INT}[JD + 0.5], 7\} \quad (3.3)$$

と決定できる。ここで、 $N=0$ は月曜日、 $N=1$ は火曜日、などである。

最後に、GPS 週(GPS week)への変換式を示す。

$$\text{WEEK} = \text{INT}[(JD - 2444244.5)/7] \quad (3.4)$$

例えば、元期 J2000.0 は 1042GPS 週の土曜日である。実際には 1024GPS 週を越えた場合、その GPS 週から 1024 を引いた数が航法メッセージ等に使用されている。これは GPS 衛星の記憶メモリに 10 ビットしか割り当てられていないからである。

演習 1 実験当日 13 時 20 分 00 秒 (日本標準時) の UTC, JD, 曜日, GPS 週, GPST を計算せよ。自分の特に選んだ日時 (例えば誕生日) についても求めよ。

3.3 座標系

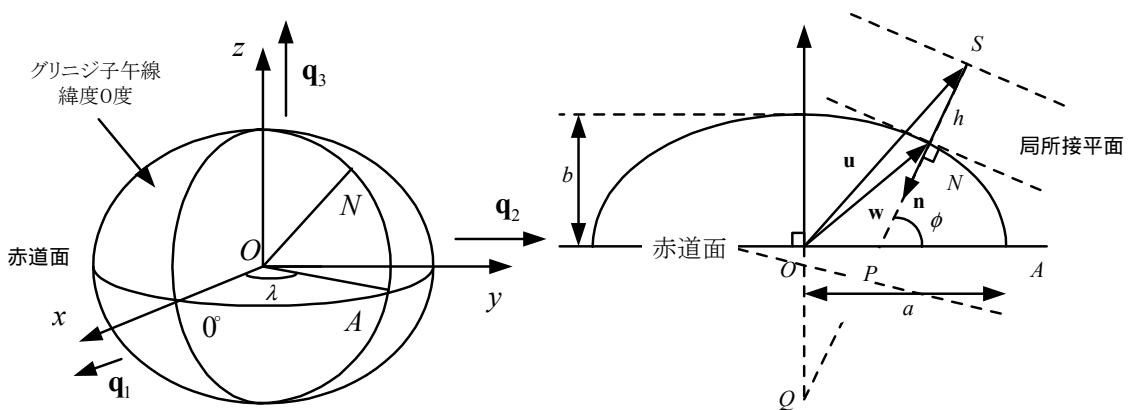
GPS で用いられる衛星や受信機の位置や速度を表す座標系には、地球中心慣性座標系、地球中心地球固定座標系、世界測地系があり、その他、日本での位置を知るための日本測地系などがある。

3.3.1 直交座標系

地球中心慣性 ECI(Earth-Centered Inertial)座標系とは、座標原点が地球の質量中心にあり、ニュートン力学の原理基盤である慣性系の役割を担う。地球自身の公転運動ため厳密には慣性系ではないが、地球近傍の衛星運動を記述するには十分である。典型的な ECI 系は、 xy 面を赤道面にとり、 x 軸正方向を春分点（3 月 21 日頃の春分の日）に地球から太陽を見る方向）、 z 軸正方向を xy 面に垂直な北極点方向、 y 軸正方向を xyz 軸が右手系直交座標系を成すように形成される。実際には、地球自身が真球ではないために太陽や月の重力の影響で赤道面が不規則な運動（自転軸の歳差・章動運動）を生じ、上で定義した ECI 系は慣性系とは見なし難い問題がある。そのために、GPS ECI 系として、2000 年 1 月 1 日正午 UTC (USNO)における赤道面を基準にして上記のように設定した座標系を採用している。

地球中心地球固定 ECEF(Earth-Centered Earth-Fixed)座標系とは、地上局（GPS 受信機など）の位置を記述するために、地球の自転と共に回転する座標系である。 xy 面を赤道面にとり、 x 軸正方向をグリニッジ子午線上の経度 0 度、 y 軸正方向を東経 90 度、 z 軸正方向を xy 面に垂直な幾何学的北極点方向にとる。

衛星の位置や速度を ECI 系から ECEF 系に座標変換し、GPS 受信機の位置を表す経緯度と高度を計算することが多い。その際に、地球を記述する物理モデルを必要とする。GPS 測位等に採用されている地球標準物理モデルは、米国防総省 DoD(Department of Defense)の世界測地系 1984、即ち、WGS-84 (World Geodetic System 1984)である。WGS-84 によると地球の形状は図 3.1 に示すような楕円体で記述される。赤道面に平行な断面は円であり、特に赤道面を含む断面の半径は地球の平均赤道半径の 6 378 137 m である。一方、赤道面に垂直な断面は楕円である。 z 軸を含む楕円断面の長軸は地球の赤道直径に一致し、その半長径 a は平均赤道半径に等しい。この楕円断面の短軸は地球の極軸に対応し、その半短径 b は WGS-84 では 6 356 752.31425 m と定められている。WGS-84 関連事項を表 3.2 にまとめる。



(a) WGS-84 準拠 ECEF 座標系 (b) 赤道面に垂直な楕円体断面

図 3.1 地球の楕円体モデル

3.3.2 ECI 系から ECEF 系への変換

基準元期 J2000.0 で定義された ECI 系から WGS-84 に準拠した ECEF 系に変換するための座標変換行列 R は、地球の回転運動を記述する回転行列を用いて次のように表現できる。

$$R = R^M R^S R^N R^P, \{q\} = R\{i\}, [x \ y \ z]^T = R[x^0 \ y^0 \ z^0]^T \quad (3.5)$$

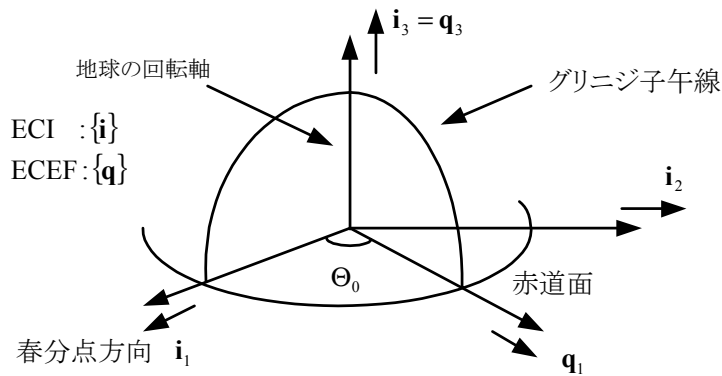


図 3.2 ECI 系と ECEF 系（赤道面座標系）

ここで、 R^P, R^N, R^S, R^M は、それぞれ、歳差(precession)、章動(nutation)、恒星時(sidereal time)、極運動(polar motion)の回転行列である。特に、地球の自転を端的に表す恒星時による回転行列は

$$R^S = C^3(\Theta_0) = \begin{pmatrix} \cos \Theta_0 & \sin \Theta_0 & 0 \\ -\sin \Theta_0 & \cos \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

で与えられる。ここで、見かけのグリニジ恒星時(apparent Greenwich sidereal time) Θ_0 は、図 3.2 に示すように、春分点からグリニジ子午線の角度を赤道面で測った量である。WGS-84 では地球の自転の平均角速度 ω_e, ω_E を定義しており、見かけの恒星時ではなく、章動運動の影響を無視した平均恒星時を使用する。平均恒星時は GPS 衛星の放送する航法メッセージに含まれている。

表 3.2 WGS-84

座標系の種類	地心測地座標系
準拠楕円体	WGS-84 楕円体
半長径 a	6 378 137.000 00 m
半短径 b	6 356 752.314 25 m
扁平率 f	$1/298.257\ 223\ 563=3.352\ 810\ 664\ 74 \cdot 10^{-3}$
第 1 数値離心率 e^2	$6.694\ 379\ 990\ 13 \cdot 10^{-3}$
第 2 数値離心率 e'^2	$6.739\ 496\ 742\ 26 \cdot 10^{-3}$
楕円体の当てはめ	地球全体
楕円体の原点	地球質量中心
高さの基準点	WGS-84 楕円体
高さの種類	楕円体高
実現方法	GPS 測位
基準点	衛星と地上追跡局
設立年代	1984 年
平均自転速度	$\omega_e = 7\ 292\ 115 \cdot 10^{-11}$ rad/s
平均自転速度(untruncated)	$\omega_E = 7\ 292\ 115.1467 \cdot 10^{-11}$ rad/s
地球の重力定数	$\mu_e = GM = 3\ 986\ 005 \cdot 10^8$ m ³ /s ²
光速	$c = 299\ 792\ 458$ m/s

3.3.3 測地座標系

ECEF 座標系を WGS-84 楕円体に準拠し設定する。即ち、図 3.1 のように原点 O を地球中心に一致させる。この基準楕円体に基づいて緯度、経度、高さを定義する。図 3.1(b)

に示す GPS 受信機の位置ベクトル \mathbf{u} が ECEF 系で次のように記述できたとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= X\mathbf{q}_1 + Y\mathbf{q}_2 + Z\mathbf{q}_3 = \{\mathbf{q}\}^T \mathbf{u} \\ \{\mathbf{q}\} &= \{\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3\}^T, \quad \mathbf{u} = [X \ Y \ Z]^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで、 $\{\mathbf{q}\}$ は ECEF の各軸の単位方向ベクトル \mathbf{q}_1 (x 軸)、 \mathbf{q}_2 (y 軸)、 \mathbf{q}_3 (z 軸) を基底ベクトルとする基準座標系である。このとき、利用者と x 軸の間の角度を xy 面で測った測位経度 (geodetic longitude) λ は、

$$\lambda = \text{atan2}(Y, X) \equiv \begin{cases} \arctan(Y/X) & X \geq 0 \\ \arctan(Y/X) + \pi & X < 0 \text{ and } Y \geq 0 \\ \arctan(Y/X) + \pi & X < 0 \text{ and } Y < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

と求められる。 λ の正の値は東経、負の値は西経を意味する。

高さ (楕円体高) (geodetic height) h とは、GPS 利用者 (位置ベクトルは図 3.1(b) の \mathbf{u}) と WGS-84 楕円体との距離である。その距離方向はその地点の楕円体法線 \mathbf{n} の方向である。この \mathbf{n} の方向は、赤道上または極点にいない限り、地球質量中心に向いていない。測位緯度 (geodetic latitude) は、この楕円体法線 \mathbf{n} とその \mathbf{n} の赤道 (xy) 平面への射影との間の角度である。図 3.1(b) で言えば、 ϕ は角 NPA に等しい。ここで、N は利用者に最も近い楕円体上の点、P は \mathbf{n} 方向直線と赤道面との交点、A は P に最も近い赤道上的点である。ECEF 系から測位緯度を求める厳密解は存在するが、通常、反復法で解く。ここでは次のような実用上精度が十分な近似式を紹介する。まず、

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{Za}{pb}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

を計算し、

$$\phi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{P - e^2 a \cos^3 \theta} \quad (3.9)$$

と求める。ここで e は (第 1 数値) 離心率 (first numerical eccentricity)、 e' は第 2 数値離心率である。高さ h は次のように求められる。

$$\begin{aligned} N &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \\ h &= \frac{P}{\cos \phi} - N \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここで、 N は卯酉線曲率半径 (radius of curvature in prime vertical) である (図 3.1(b) の線分 NQ の長さ)。逆に、測地系から ECEF 系への変換には次式を用いる。

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \phi \end{aligned} \quad (3.11)$$

同一点の測地系と ECEF 系における座標値の例を以下に掲げる。

$$\phi = 47^\circ, \quad \lambda = 15^\circ, \quad h = 2,000\text{m}$$

$$X = 4,210,520.621\text{m}, \quad Y = 1,128,205.600\text{m}, \quad Z = 4,643,227.495\text{m}$$

演習 2 上の数値例を確認せよ。

3.3.4 日本測地系

日本の測量の基盤となる座標系を日本測地系 (Tokyo Datum) と言う。通常の日本の地図に記された高さ (標高) は、東京湾の平均海水面 (local mean sea level) またはジオイド (geoid)

面を基準に測量される。一方、GPS 測位では WGS-84 楕円体を基準とした高さ（楕円体高）を計算するので、その値は地図の標高とは異なる。また、緯度や経度も、日本測地系の準拠する標準楕円体(Bessel 楕円体)が WGS-84 と違うために、それらの値も異なる。日本の標準楕円体と WGS-84 との原点は僅かに異なり、また、姿勢およびスケールも非常に僅かながらも異なる。国土地理院によれば、日本測地系から WGS-84 系へ変換する場合、次の平行移動量を

$$\Delta X = -147.5 \text{ m}, \Delta Y = 507.8 \text{ m}, \Delta Z = 680.2 \text{ m} \quad (3.12)$$

加えれば一般の測量では十分な精度が得られる。逆変換の場合は引くことになる。別法として、日本測地系の緯度、経度、標高に、東京近傍については下記を加えると WGS-84 系の測地座標値に変換できる。

$$\Delta\phi = 11.65 \text{ sec}, \Delta\lambda = -11.53 \text{ sec}, \Delta h = 38.5 \text{ m} \quad (3.13)$$

3.3.5 地平座標系

地球表面上の観測基準点から見た衛星の位置を、衛星までの距離 ρ 、北からの東に測った方位角(azimuth) A 、水平面からの仰角(elevation) E で表すことがある。ECEF 系 $\{q\}$ からこの地平座標系 $\{p\}$ の変換は図 3.3 と図 3.4 より以下のようにすればよい。

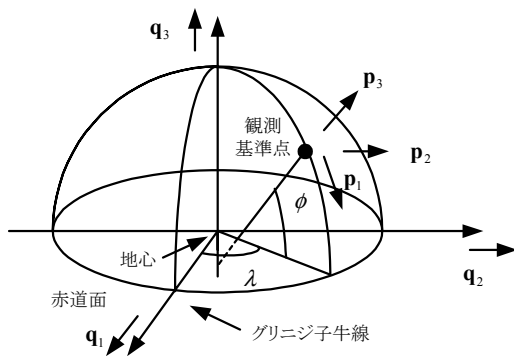


図 3.3 ECEF 系と観測基準点中心地平座標系

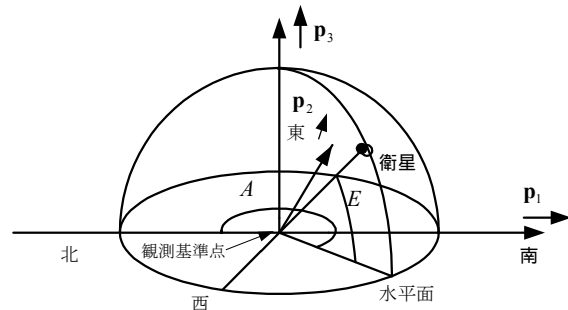


図 3.4 地平座標系

まず $\{q\}$ 系から $\{p\}$ 系への座標変換行列を R' とすれば次の関係がある。

$$R' = R^2(\pi/2 - \phi)R^3(\lambda), \{p\} = R'\{q\} \quad (3.14)$$

次に、観測基準点、衛星の位置が、 $\rho_{R0} = \{q\}^T \rho_{R0}, \rho^S = \{q\}^T \rho^S$ のように共に ECEF 系で表されているとき、

$$\rho = \{q\}^T \rho \equiv \rho^S - \rho_{R0}$$

$$\rho = [x \ y \ z]^T = \rho^S - \rho_{R0} = [x^S - x_{R0} \ y^S - y_{R0} \ z^S - z_{R0}]^T \quad (3.15)$$

と定義すれば、式(3.14)の関係を用いて、

$$\rho = \{q\}^T \rho \equiv \{p\}^T R' \rho \equiv \{p\}^T \rho_H, \rho_H \equiv [x_H \ y_H \ z_H]^T \quad (3.16)$$

であることより次のように求められる。

$$\rho = \sqrt{\rho_H^T \rho_H} = \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2}, E = \arctan \frac{z_H}{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}}, A = \pi - \text{atan2}(y_H, x_H) \quad (3.17)$$

演習 3 式(3.14)を確認して具体的に成分で表せ。また式(3.17)を導け。

4 衛星軌道

4.1 運動方程式

地球軌道上を周回する衛星の軌道運動を記述する微分方程式は次のように表される。

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V + \mathbf{a}_d \quad (4.1)$$

ここで、 \mathbf{r} は ECI 系における衛星の位置ベクトル、 V は地球の重力ポテンシャル、 \mathbf{a}_d は地球重力以外の力によって衛星に生じる加速度であり、 ∇ はグラディエント演算子

$$\nabla = \{\mathbf{i}\}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (4.2)$$

である。衛星地点における地球の重力ポテンシャル V は、その点の球座標 (r, ϕ', α) で球調和関数展開表示される。

$$V = \frac{\mu_e}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l J_l P_l(\sin \phi') + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left(\frac{a}{r}\right)^l [C_{lm} \cos m\alpha + S_{lm} \sin m\alpha] P_{lm}(\sin \phi') \right\} \quad (4.3)$$

ここで、 μ_e は地球の重力定数、 $r = |\mathbf{r}|$ は原点から衛星までの距離、 ϕ' は衛星の地表上緯度 (geocentric latitude)、 α は経度 (right ascension)、 a は地球の平均赤道半径、 P_l は Legendre の多項式、 P_{lm} は Legendre の陪関数、 J_l, C_{lm}, S_{lm} は無次元係数である。式(4.3)の第 1 項は 2 体問題のポテンシャル関数であること、 ϕ' は前章の測地緯度 ϕ とは異なることに注意せよ。WGS-84 では無次元係数 J_l, C_{lm}, S_{lm} を 18 次のオーダまで与えている。加速度 \mathbf{a}_d は、太陽や月による重力、太陽光による太陽輻射圧、衛星からの漏出ガスによる力、地球の潮汐力、軌道変更時のスラスタ推力などの摂動力で生じる。

演習 4 重力ポテンシャルを $V = \mu_e / r$ と選ぶことで、2 体問題を記述する運動方程

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_e}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.4)$$

が導かれることを示せ。

4.2 ケプラー軌道要素

衛星の軌道運動を解く方法は様々あるが、GPS では式(4.4)で記述される 2 体問題の解である 6 個の積分定数を用いる解析的方法を使用する。但し、摂動力が働くのでこの積分定数は時間の関数となる。GPS ではこの 6 個の積分定数として古典的なケプラー軌道要素を採用し、その時間変化分を航法メッセージとして送信している。2 体問題の場合、衛星の軌道は図 4.1 に示す変数で表現されるケプラー軌道と呼ぶ楕円となる。6 個のケプラー軌道要素は、楕円軌道の位置を規定する昇交点赤経 Ω 、軌道傾斜角 i 、近地点引数 ω の 3 個と、軌道の形状を規定する軌道長半径 a 、軌道離心率 e の 2 個、および、衛星の軌道上の位置を指定するための近地点通過時刻 T_0 である。

衛星の平均角速度である平均運動 n (mean motion) と周期 P は

$$n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{\mu_e}{a^3}} \quad (4.5)$$

である。GPS では軌道長半径の公称値は $a = 26\,560$ km であるので軌道周期は 12 恒星時となり、衛星の地表上軌跡は 1 恒星日毎に繰り返す。衛星の軌道上の瞬間位置は離角 (anomaly) で記述される。平均近点離角 $M(t)$ (mean anomaly) は数学的に導入された仮想量であるが、離心近点離角 $E(t)$ (eccentric anomaly) と真近点離角 $\nu(t)$ (true anomaly) は図 4.1 のように幾何学的に定義されて次式で与えられる。

$$M(t) = n(t - T_0) \quad (4.6)$$

$$E(t) = M(t) + e \sin E(t) \quad (4.7)$$

$$\nu(t) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E(t)}{2} \right) \quad (4.8)$$

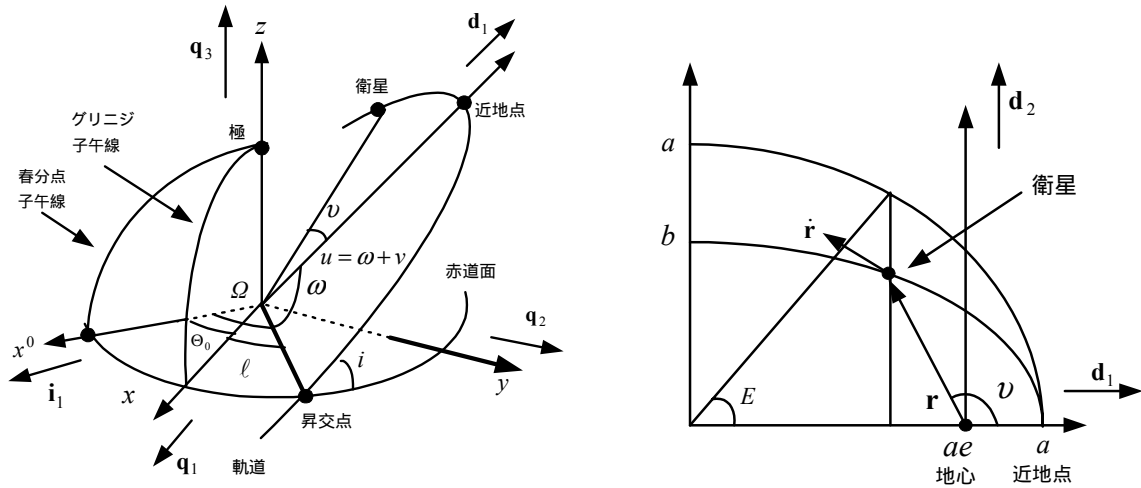


図 4.1 ケプラー軌道と軌道要素

特に式(4.7)はケプラー方程式と呼ばれる。数値例として、周期半日、離心率 0.1 の軌道で近地点通過後 3 時間のそれぞれの値は、以下で与えられる。

$$M = 90.0000, E = 95.7012, v = 101.3838$$

離心近点離角 E は例えば次のようにニュートンの方法で得られる漸化式で求める。

$$E_0 = M$$

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n} \quad (n \geq 0) \quad (4.9)$$

演習 5 漸化式(4.9)を導き、上の数値例を確認せよ。

4.3 衛星の位置・速度座標

図 4.1 に示す軌道面基準座標系 $\{d\}$ を用いる。この座標系も $\{i\}$ 系と同程度に慣性系と見なせる。衛星の位置 $\mathbf{r} = \{d\}^T \mathbf{r}$ と速度 $\dot{\mathbf{r}} = \{d\}^T \dot{\mathbf{r}}$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{r} = a \begin{bmatrix} \cos E - e & \sqrt{1-e^2} \sin E & 0 \end{bmatrix}^T = r \begin{bmatrix} \cos v & \sin v & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos v} \quad (4.11)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{na^2}{r} \begin{bmatrix} -\sin E & \sqrt{1-e^2} \cos E & 0 \end{bmatrix}^T = \sqrt{\frac{\mu_e}{a(1-e^2)}} \begin{bmatrix} -\sin v & \cos v + e & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

$$\dot{r} = \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - (e \cos E)^2} = \sqrt{\mu_e \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (4.13)$$

ここで、 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}$, $\dot{r} = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}}}$ であり、軌道の短半径と長半径の関係 $b = a\sqrt{1-e^2}$ および $dE/dt = na/r$ を用いた。式(4.13)は運動エネルギー保存の法則を表す。

演習 6 上式(4.10)~(4.13)を導け。

衛星の位置・速度座標の $\{d\}$ 系から ECI 系 $\{i\}$ への変換は次のように表される。

$$\mathbf{r} = \{d\}^T \mathbf{r} = \{i\}^T \mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \{d\}^T \dot{\mathbf{r}} = \{i\}^T \dot{\mathbf{r}}, \quad \{i\} = C\{d\}$$

とすると

$${}^i \mathbf{r} = C \mathbf{r}, \quad {}^i \dot{\mathbf{r}} = C \dot{\mathbf{r}} \quad (4.14)$$

ここに、 C は $\{d\}$ 系から $\{i\}$ 系への座標変換行列である。

$$C = R^3(-\Omega)R^1(-i)R^3(-\omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

更に、ECEF 系 $\{q\}$ に変換するには、グリニジ恒星時を用いて、式(3.6)より座標変換行列を C の代わりに

$$C^{Q/D} = R^3(\Theta_0)R^3(-\Omega)R^1(-i)R^3(-\omega) = R^3(-\ell)R^1(-i)R^3(-\omega) \quad (4.16)$$

とすればよい。ここで、 $\ell = \Omega - \Theta_0$ は昇交点経度である (図 4.1 参照)。式(4.15)で Ω の代わりに ℓ とすれば C' が求まる。数値例を以下に示す。但し、 $\rho, \dot{\rho}$ は $\{q\}$ 系における座標である： $\mathbf{r} = \{q\}^T \rho, \dot{\mathbf{r}} = \{q\}^T \dot{\rho}$

$$a = 26\,000 \text{ km}, e = 0.1, \omega = -140^\circ, i = 60^\circ, \ell = 110^\circ, E = 45^\circ$$

$$\rho = [11465 \ 3818 \ -20923]^T \text{ km}, \dot{\rho} = [-1.2651 \ 3.9960 \ -0.3081]^T \text{ km/s}$$

演習 7 式(4.15)を導き、数値例を確認せよ。

4.4 GPS 衛星軌道の推定

GPS では衛星軌道の推定位置を、天体暦 (アルマナック, almanac)、放送暦 (エフェメリス, ephemeris)、精密暦 (precise ephemeris) の 3 種類を用いて提供している。その内、エフェメリスは GPS 衛星が常時放送しており、精密暦は地上局により後処理で計算され、アルマナックとともにインターネットなどを通して得られる (例えば、<http://www.navcen.uscg.gov/>)。アルマナックの精度は約数 km、エフェメリスは SA オン時で 2~50m、SA オフ時で 2~5m 以下、精密暦は 0.5~1m 以下とされている。

4.4.1 アルマナック

天体暦アルマナックは衛星軌道の概略位置を知り測量計画を立てるために用いる。与えられる主なデータを表 4.1 に示す。

表 4.1 アルマナック・データ <YUMA FORMAT>

変数	意味
ID	衛星の PRN 番号
HEALTH	衛星の健康状態 (000 の場合は利用可能)
e	軌道離心率
t_a	現 GPS 週における almanac 軌道要素の基準時刻 (s)
i	軌道傾斜角 (rad)
$\Omega \cdot \text{dot}$	昇交点経度の変化率 (rad/s)
\sqrt{a}	軌道長半径の平方根 (\sqrt{m})
ℓ_0	基準時刻における昇交点経度 (rad)
ω	近地点引数 (rad)
M_0	基準時刻 t_a における平均近点離角 (rad)
a_0	時計の位相バイアス (s)
a_1	時計の周波数バイアス (s/s)
WEEK	GPS 週

表 4.2 第 1024 週 (第 0 週) のアルマナックデータの実例

```
***** Week    0  almanac for PRN-01 *****
ID:             01
Health:         000
Eccentricity    0.4710197449E-002
```

Time of Applicability(s): 503808.0000
 Orbital Inclination(rad) 0.9586445155
 Rate of Right Ascen(r/s): -0.8000333246E-008
 SQRT(A) (m 1/2): 5154.306152
 Right Ascen at Week(rad) 0.2672875761E+001
 Argument of Perigee(rad) -1.728160061
 Mean Anom(rad): 0.1557658620E+001
 Af0(s): 0.9632110596E-004
 Af1(s/s): 0.0000000000E+000
 week: 0

<SEM FORMAT>では、単位 (rad) は (rad / π) で表される。また、 i の代わりに δi が用いられる。

$$\delta i = -0.3 + i / \pi \quad (4.17)$$

衛星の送信時刻 t におけるケプラー軌道要素を求めるには次式を用いればよい。

$$M = M_0 + n(t - t_a)$$

$$\ell = \ell_0 + (\Omega \cdot \text{dot})(t - t_a) - \omega_E(t - t_0) \quad (4.18)$$

ここで、 $\omega_E = 7292115.1467 \cdot 10^{-11}$ rad/s は地球の自転角速度(untruncated)である。さらに t_0 は現 GPS 週の開始時刻である ($t_0 = 0$)。他の 4 つのケプラー要素 e, i, a, ω は変化しない。また、衛星の時計バイアスは次式で与えられる。

$$\delta^S = a_0 + a_1(t - t_a) \quad (4.19)$$

表 4.2 の値を用いると 1999 年 8 月 22 日 0 時 0 分 0 秒 (GPST) の GPS 衛星(PRN-01)の状態は次のようになる。

昇交点経度: $l = 153.375438(\text{deg})$
 平均近点離角 : $M = 200.566563(\text{deg})$
 緯度引数 : $u = 101.361714(\text{deg})$
 位置 : $\rho = [-2037514.554743 \ -15794735.400321 \ 21410657.780658]^T$

4.4.2 エフェメリス

表 4.3 に示した放送暦エフェメリスは地上制御部分の 5 つのモニタ局の観測結果に基づいたデータで、現在では 2 時間毎に更新される。衛星の基準軌道の計算に使用される。

表 4.3 放送暦 (エフェメリス)

変数	意味
AODE	エフェメリスの年齢(Age of ephemeris data)(s)
t_e	現 GPS 週における ephemeris 軌道要素の基準時刻 (s)
$\sqrt{a}, e, M_0, \omega_0, i_0, \ell_0$	基準時刻 t_e におけるケプラー軌道要素
Δn	平均運動の補正量 (s)
$i \cdot \text{dot}$	軌道傾斜角の変化率 (rad/s)
$\Omega \cdot \text{dot}$	昇交点経度の変化率 (rad/s)
Cuc, Cus	緯度引数 u の補正係数 (rad)
Cre, Crs	軌道半径 r の補正係数 (m)
Cic, Cis	軌道傾斜角 i の補正係数 (rad)

地球の真球からのズレ、潮汐、太陽輻射圧などによる摂動の影響は、表 4.2 の最後の 9 個の補正係数に考慮されている。送信時刻 t におけるケプラー軌道要素を求めるには、次式を用いればよい。

$$M = M_0 + \left(\sqrt{\frac{\mu_e}{a^3}} + \Delta n \right) (t - t_e)$$

$$\begin{aligned}
\ell &= \ell_0 + (\Omega \cdot \text{dot})(t - t_e) - \omega_E(t - t_o) \\
\omega &= \omega_0 + C_{uc} \cos(2u) + C_{us} \sin(2u) \\
r &= r_0 + C_{rc} \cos(2u) + C_{rs} \sin(2u) \\
i &= i_0 + C_{ic} \cos(2u) + C_{is} \sin(2u) + (i \cdot \text{dot})(t - t_e)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ここで、緯度引数(argument of latitude) $u = \omega + v$ (計算の便宜上 $u = \omega_0 + v$ とする) は昇交点から衛星までの角度(図 4.1 参照)であり、 r_0 は、軌道長半径 $a = (\sqrt{a})^2$ 、軌道離心率 e 、送信時刻 t における離心近点離角 E (式(4.9)から得られる)を用いて式(4.11)より計算される。アルマナックの場合と同様に、 $\omega_E = 7\,292\,115.1467 \cdot 10^{-11}$ rad/s を用いる。また、 $t_o = 0$ と定義されている。経過時間を求める際に、

$$t - t_e = \begin{cases} t - t_e + 604800 & (t - t_e < -302400) \\ t - t_e - 604800 & (t - t_e > 302400) \\ t - t_e & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{4.21}$$

とするとよい。ただし、 $t = t^s(\text{GPS})$ に注意すること。ここで得られた軌道要素から、4.3 章で述べたように、衛星の位置および速度座標が ECEF 系で求まる。

4.4.3 精密暦

精密暦は地上の追跡局ネットワークの観測結果に基づき、いくつかの団体によって計算されている。時刻をパラメータとした 3 次元座標の数値で与えられ、任意時刻の衛星の位置・速度はラグランジュ補間などの方法によって求める。国際 GPS 地球力学事業(IGS)は、精密暦を数週間の遅れでインターネット上で提供しており、その精度は 3cm 程度と言われている。

5 単独測位

単独測位とは 1 台の GPS 受信機を用いて測位を行うことである。1 秒以下の測定間隔、30m 程度の精度 (SA オフ時) で 3 次元的な位置を実時間決定する。

5.1 測位原理

原理は極めて明快である。位置が正確に分かっている複数衛星から発する信号伝播時間を測定し、光速度を乗じることで自分の位置と衛星の距離を計算する(図 5.1)。このとき、GPS 受信機の位置は衛星の位置を中心とし半径が測定距離の球面上にある。一般に、3 個の球面の交わりは点であり観測点となる(図 5.2)。他にもう一点存在するが現実的には識別可能である。衛星の送信する C/A コード、または P コードの符号パターンを読みとり、その受信時刻を確定できれば、信号電波時間を測定できる。しかし、受信機の時計が正確でないとその伝播時間は正しくない。さらに、電波が伝播する過程で様々な遅延が生じる。そのため、こうして求められた距離のことを擬似距離(pseudo range)と呼ぶ(図 5.3)。受信機時計は、航法メッセージから Z カウントと呼ばれる経過時間を用いて時刻合わせができるが、衛星との距離が正確に分からない場合、その精度は 1/100 秒の桁であり、測位には不十分である(電波はその間に 300km 程度進む)。したがって、時間に関する未知数 1 個を追加して、位置に関する未知数 3 個との全 4 個を、最低 4 機の衛星からの情報(擬似距離)で解くことになる。しかし擬似距離には誤差を含んでいるため、さらに複数の衛星測距データを用いて最小 2 乗法などで観測点を推定する。2 次元的な概念図を図 5.4 に示す。また速度測定は、GPS 衛星との速度差によって搬送波や信号コードに生じるドップラー効果を用いて行われる。詳細は省略する。

全GPS衛星は原子時計による正確なタイミングで測位用信号を発信
各衛星の位置(と速度および運動方向)は軌道情報により計算可能

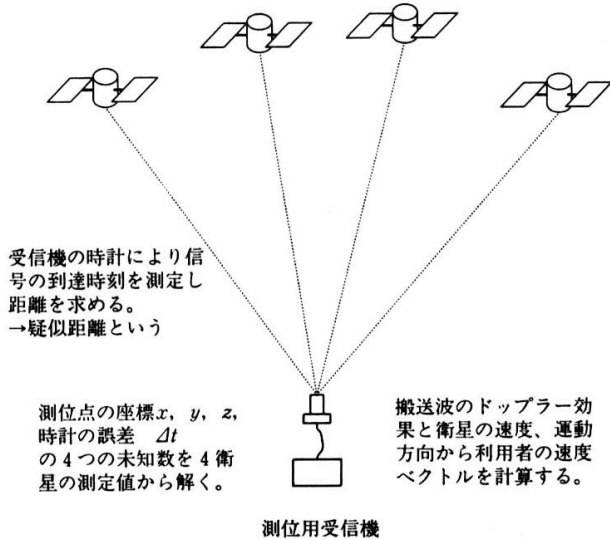


図 5.1 衛星群を用いた測位

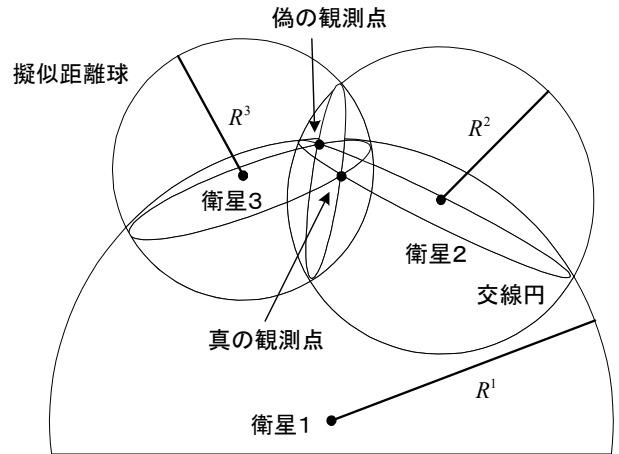


図 5.2 観測点の決定(3次元)

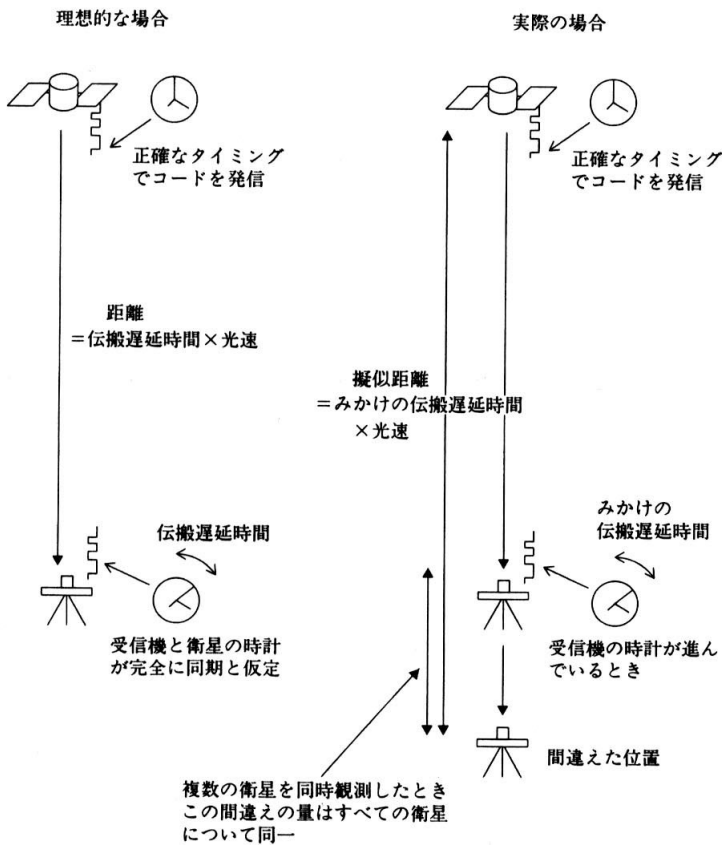


図 5.3 信号伝播遅延と疑似距離

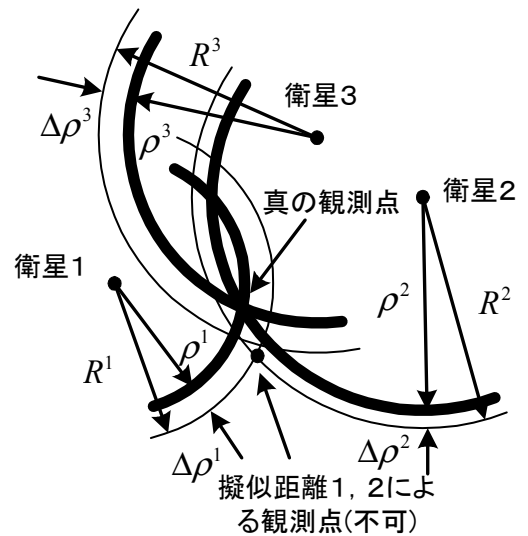


図 5.4 観測点と誤差(太線)(2次元)

5.2 数学的モデル

図 5.5 に示すように、衛星の位置ベクトルを $\rho^S = \{q\}^T \rho^S$ 、受信機を $\rho_R = \{q\}^T \rho_R$ とする。このとき、受信機と衛星の距離は

$$\rho = |\rho^S - \rho_R| = \sqrt{(\rho^S - \rho_R)^T (\rho^S - \rho_R)} \quad (5.1)$$

となる。実際には時間の遅れが生じるので、受信機は疑似距離 R を測定する。

$$R = \rho + \Delta\rho = \rho + c\Delta\delta = c\Delta t \quad (5.2)$$

ここで、 $\Delta\rho$ は距離誤差、 Δt は擬似距離に対応する伝播時間（擬似距離時間）、 c は光速である。この電波信号の送信・着信時刻の関係を示したのが図 5.6 である。図中の記号の意味を表 5.1 に示す。

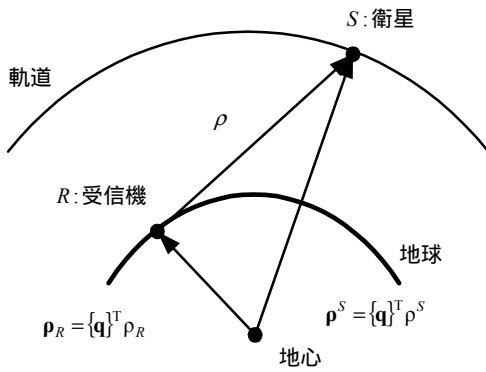


図 5.5 受信機と衛星の座標

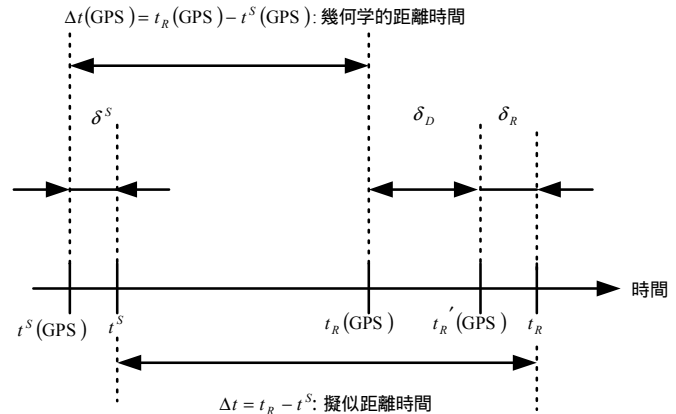


図 5.6 距離測定時刻の関係

表 5.1 測定時刻と距離等価時間

記号	意味
$t^S(\text{GPS})$	信号を衛星から送信した時の GPS 時系の時刻
δ^S	衛星時計の GPS 時系からのオフセット時間（進み正）
t^S	衛星時計が読んだ、信号の衛星から送信された時刻
$t_R(\text{GPS})$	信号が受信機に着信した時の GPS 時系の時刻
δ_D	信号が衛星から受信機までの到達時間のオフセット時間（進み正）
$t'_R(\text{GPS})$	δ_D だけ遅れて信号が受信機に着信した時の GPS 時系の時刻
δ_R	受信機時計の GPS 時系からの オフセット時間（進み正）
t_R	受信機時計が読んだ、信号の受信機に着信した時刻
$\Delta t(\text{GPS})$	幾何学的距離に等価な時間
Δt	擬似距離に等価な時間
$\Delta\delta$	距離誤差に等価な時間

このとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_R - t^S = \{t_R(\text{GPS}) + (\delta_R + \delta_D)\} - \{t^S(\text{GPS}) + \delta^S\} \\ &= \Delta t(\text{GPS}) + \Delta\delta \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここで

$$\Delta t(\text{GPS}) = t_R(\text{GPS}) - t^S(\text{GPS}) \quad (5.4)$$

$$\Delta\delta = \delta_R - \delta^S + \delta_D \quad (5.5)$$

したがって、式(5.2)は次のように書き表せる。

$$R = c\Delta t = c\Delta t(\text{GPS}) + c\Delta\delta = \rho + c\Delta\delta \quad (5.6)$$

$$\rho = c\Delta t(\text{GPS}) = c\{t_R(\text{GPS}) - t^S(\text{GPS})\} \quad (5.7)$$

衛星時計のオフセット時間は、航法メッセージの時計補正係数を用いて a_0, a_1, a_2

$$\delta^S = a_0 + a_1(t - t_c) + a_2(t - t_c)^2 + \Delta t_r \quad (5.8)$$

と見積る。ただし、 $t = t^S = t_R - \Delta t$ であり、 $t - t_c$ についても式(4.21)と同じ処理を行うこと。ここで、 t_c は時計の基準時刻、 Δt_r は衛星の高度変化（近地点と遠地点の差）による重力変化から生じる相対論効果で、次式で与えられる。

$$\Delta t_r = Fe\sqrt{a} \sin E, \quad F = -4.4442807633 \cdot 10^{-10} \text{ s/m}$$

他に地球の自転による相対論効果 (Sagnac 効果) があり、航空機や宇宙機などで GPS を使用するときには必要になる。

信号が通過する道の途上で生じるオフセット時間 δ_D は、電離層や対流圏の影響による遅れ (結果的に 8m の位置誤差と大きい)、受信機の雑音や解像度によるオフセット、受信機ハードウェアによるオフセット、SA による劣化オフセット (25m 以上、現在は無い)、マルチパスによるオフセットなどがある。ここで、特にマルチパスとは、電波が建物などに反射してアンテナに着信することで、TV のゴースト現象と同じである。測定時には回りに高い建物等がないように気を付けねばならない。

5.3 単独測位の解法

前節の議論から方程式(5.6)において、求めたい未知数は、

$$\rho = \sqrt{(\rho^S - \rho_R)^T (\rho^S - \rho_R)} = \sqrt{(x^S - x_R)^2 + (y^S - y_R)^2 + (z^S - z_R)^2} \quad (5.9)$$

の中の受信機の位置座標 $\rho_R = [x_R \ y_R \ z_R]^T$ の 3 個と受信機の時計補正項 δ_R の全 4 個である。観測量 (既知) は、擬似距離 R 、衛星の位置座標 $\rho^S = [x^S \ y^S \ z^S]^T$ 、衛星の時計補正項 δ^S 、 δ_D の内のモデル化可能な項である。その他のモデル化できない諸々の量は不確定量 (ノイズ) として考える。したがって、衛星 i に関する式(5.6)が少なくとも 4 個は必要である。

$$R^i = \rho^i - c\delta^i + c\delta_R + n^i \quad (5.10)$$

ここで、式(5.9)において、 S を i で置き換えて

$$\rho^i = \sqrt{(\rho^i - \rho_R)^T (\rho^i - \rho_R)} = \sqrt{(x^i - x_R)^2 + (y^i - y_R)^2 + (z^i - z_R)^2} \quad (5.11)$$

とした。 n^i は衛星 i に関する式(5.6)の不確定量 (雑音、ノイズ) である。式(5.10), (5.11) は ρ_R に関する非線形方程式であり解析解が知られているが、ここではよく知られた典型的な解法である線形化法、即ち、 ρ_R の近似値 ρ_0 の回りで線形化して解く方法を紹介する。

$$\rho_R = \rho_0 + \Delta\rho = [x_0 + \Delta x \quad y_0 + \Delta y \quad z_0 + \Delta z]^T \quad (5.12)$$

のように新しい (微小) 変数 $\Delta\rho = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T$ を導入すると、一般に関数 $f(\rho_R)$ は Taylor 展開して

$$f(\rho_R) = f(\rho_0 + \Delta\rho) \cong f(\rho_0) + \left. \frac{\partial f(\rho_R)}{\partial \rho_R} \right|_{\rho_R = \rho_0} \cdot \Delta\rho \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial f(\rho_R)}{\partial \rho_R} \right|_{\rho_R = \rho_0} = \left[\frac{\partial f(\rho_R)}{\partial x_R} \quad \frac{\partial f(\rho_R)}{\partial y_R} \quad \frac{\partial f(\rho_R)}{\partial z_R} \right] \Big|_{\rho_R = \rho_0} \quad (5.14)$$

と近似できるから、式(5.10)は未知変数が $\Delta\rho = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T$ と δ_R の 4 個の線形方程式となる。

$$R^i - \rho_0^i + c\delta^i = -\frac{1}{\rho_0^i} (\rho^i - \rho_0)^T \Delta\rho + c\delta_R + n^i \quad (5.15)$$

ここで、

$$\rho_0^i = \rho^i \Big|_{\rho_R = \rho_0} = \sqrt{(\rho^i - \rho_0)^T (\rho^i - \rho_0)} = \sqrt{(x^i - x_0)^2 + (y^i - y_0)^2 + (z^i - z_0)^2} \quad (5.16)$$

演習 8 次式を証明し、それぞれの成分が $\rho^i - \rho_0$ の方向余弦 (負の向き) であること、即ち、視線方向の単位ベクトル (負の向き) であることを示せ。また、 $f(\rho_R) = \rho^i$ に注意して式(5.15)を導け。

$$\left. \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_R} \right|_{\rho_R = \rho_0} = \left[-\frac{x^i - x_0}{\rho_0^i} \quad -\frac{y^i - y_0}{\rho_0^i} \quad -\frac{z^i - z_0}{\rho_0^i} \right] = -\frac{1}{\rho_0^i} (\rho^i - \rho_0)^T \quad (5.17)$$

観測される衛星の個数を N として、次の定義を用いれば、

$$\Delta p^i = R^i - \rho_0^i + c\delta^i$$

$$h^i = -\frac{1}{\rho_0^i}(\rho^i - \rho_0) \quad (5.18)$$

$$\Delta p = \begin{bmatrix} \Delta p^1 \\ \Delta p^2 \\ \dots \\ \Delta p^N \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h^{1T} & 1 \\ h^{2T} & 1 \\ \dots & \dots \\ h^{NT} & 1 \end{bmatrix}, \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta p \\ c\delta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\delta_R \end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix} n^1 \\ n^2 \\ \dots \\ n^N \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

式(5.15)の線形連立方程式は次の行列形式で表せる。

$$\Delta p = H\Delta x + n \quad (5.20)$$

上式の最小 2 乗解は、次の連立方程式を Δx について解けばよい。

$$(H^T \Sigma^{-1} H)\Delta x = H^T \Sigma^{-1} \Delta p \quad (5.21)$$

行列 $H^T \Sigma^{-1}$ がフルランクならば、形式的に、

$$\Delta x = (H^T \Sigma^{-1} H)^{-1} H^T \Sigma^{-1} \Delta p \quad (5.22)$$

と書ける。ここで、 Σ はノイズ n の共分散行列である。GPS では通常、測定チャンネル間で相関はないので σ_{PR} を受信機の測距誤差として $\Sigma = \sigma_{PR}^2 U$ が成立する (U は単位行列)。このとき、

$$(H^T H)\Delta x = H^T \Delta p \quad (5.23)$$

または形式的に、 $\Delta x = (H^T H)^{-1} H^T \Delta p$ である。 $H^T H$ は 4×4 の正方行列である。行列 $(H^T H)^{-1} H^T$ を H の擬逆行列と言う。特に $N=4$ ならば行列 H も 4×4 の正方行列となり、さらに非特異ならば

$$H\Delta x = \Delta p \quad \text{または} \quad \Delta x = H^{-1}\Delta p \quad (5.24)$$

と表せる。一般に未知数 Δx を求めるには式(5.23)の線形連立方程式をガウスの掃き出し法などで数値的に解く。こうして求められた $\Delta x = [\Delta p \quad c\delta_R]^T$ から、式(5.12)を用いて次の新しい近似値

$$\rho_{0, \text{next}} = \rho_0 + \Delta p = [x_0 + \Delta x \quad y_0 + \Delta y \quad z_0 + \Delta z]^T$$

を計算して予め決めた精度内に収束するまで繰り返す。通常、数回で収束する。

演習 9 最小 2 乗解とは次の Σ^{-1} を重みにした残差 $r(x)$ を最小化する x^* であることを証明せよ。

$$r(x) = n^T \Sigma^{-1} n = (Hx - \Delta p)^T \Sigma^{-1} (Hx - \Delta p) \quad (5.25)$$

ここで見やすくするため $x = \Delta x$ とおいた。最小化するための必要条件は $\partial r(x)/\partial x = 0$ 、十分条件は $r(x^*) \leq r(x)$ 、また Σ^{-1} は正定対称行列 ($\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1T}$, $x^T \Sigma^{-1} x > 0$ for $\forall x$) であることに注意せよ。

演習 10 線形連立方程式の数値解法アルゴリズムについて簡単にまとめよ。

計算例を示す。観測点の位置が WGS-84 で、緯度、経度、高さ (楕円体高) が

$$\phi = 35^\circ 43' 23.4'' \text{N}, \lambda = 139^\circ 46' 17.6'' \text{E}, h = 50.0 \text{ m}$$

とする。この地点の直交座標値は

$$x = -3 \ 957 \ 883.0 \text{ m}, y = 3 \ 348 \ 039.9 \text{ m}, z = 3 \ 703 \ 327.2 \text{ m}$$

である。次に、衛星はすべて軌道半径 26 672 000 m の円軌道を周回すると仮定し、観測をした瞬間に 4 機の衛星が表 5.2 の位置にいたとする。表 5.3 のように、受信機の時計が $0.1 \mu\text{s}$ 進んでいたため、計測された受信機から衛星までの擬似距離が真の距離よりも 30 m 過大であるとして解くと、受信機座標初期値を $[0 \ 0 \ 0]$ としても 3 回の反復でほぼ収束する。

このように、単独測位はまず C/A コードによる擬似距離を用いる。その周期は 1 ms であるので、その間に $0.001c = 300 \text{ km}$ 進む。このことは、300 km 毎に同じパターンの C/A

コードが繰り返し並んで走っていることであり、擬似距離測定時に 300 km 単位の不確定が存在する。受信時計バイアスを見ると、幅 300 km 程度のノコギリ歯状の時間変化を示す。この不確定性は地上での一般的な単独測位では無視し得るが、宇宙空間での使用時には問題となり、その解決に P コードの利用が考えられる。同様な不確定性は衛星の姿勢決定や高精度測量などに使う干渉測位使用時に波数不確定と呼ばれる問題として再び登場する。

表 5.2 観測時の衛星位置

番号	x m	y m	z m
1	-16 736 863.3	14 043 895.8	15 298 430.7
2	4 631 544.2	26 266 792.4	0.0
3	-25 867 740.8	-4 561 180.6	-4 631 544.2
4	-5 636 037.1	9 761 902.7	24 173 041.3

表 5.3 計測された疑似距離

疑似距離 m
20 301 510.2
24 754 062.2
24 740 032.4
21 516 605.8

5.4 精度劣化率 DOP

前節の式(5.23)が成り立つときの推定共分散誤差は、

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma_{PR}^2 M \\ M &= (M_{ij}) = (H^T H)^{-1} \end{aligned} \quad (5.26)$$

となることが知られている。このことは、測位精度が受信機の測距誤差 σ_{PR} と、受信機側から見た衛星の幾何学的配置のみによって決まることを意味する(演習 8 参照)。そこで、衛星の幾何学的配置の良さを示すスカラー関数である測位精度劣化率 DOP (dilution of precision) を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \text{GDOP} &= \sqrt{\text{trace } M} = \sqrt{M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44}} \\ \text{PDOP} &= \sqrt{M_{11} + M_{22} + M_{33}} \\ \text{TDOP} &= \sqrt{M_{44}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

ここで、G (geometrical), P (position), T (time) である。他に、座標系を地平座標系に取ったときの HDOP や VDOP (H (horizon), V (vertical)) などの定義もある。このような DOP を用いると、測位(時刻)精度は概略次で与えられる。

$$\sigma = \text{DOP} \cdot \sigma_{PR} \quad (5.28)$$

例えば、(水平成分位置誤差) = HDOP × (測距誤差) となる。特に、 $N=4$ のとき、 $\det(H^T H)$ は受信機から衛星への 4 つの視線ベクトルの作る 4 面体の体積であることが分かる。受信機の多くはこの DOP が最小になるような衛星の組を選んで測定を行っている。

計算例を示す。3 機の衛星が仰角 30° 、方位角がそれぞれ 0° 、 120° 、 240° にあり、もう 1 機が天頂にあるとする。このとき、

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 1 \\ \sqrt{3}/4 & -3/4 & -1/2 & 1 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 8/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 10/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

であり、このとき、GDOP=3.073 となる。これから分かることは、水平方向は測距誤差よりもよい精度で決定できるが、上下方向の精度はよくない。また、第 3 成分と第 4 成分に相関があるので、時計の誤差が上下方向の位置決定精度に影響を与えている。

6 相対測位

表 2.2 に示したように、相対測位には、DGPS (差分(differential)GPS) や干渉測位と呼ばれる測位方法があり、前述の単独測位の精度を飛躍的に向上させる。ここでは、DGPS

について簡単に説明する。

6.1 DGPS

DGPS はシステム精度を向上させる手段として考案された。DGPS の基本的な考え方は、ある一つの参照地点(reference point)に対する、他の未知点(利用者)の相対的な位置(および速度)を求めるものである。両点に共通な誤差を相殺することによって結果的に測位精度を改善する。そこで、正確に位置のわかっているところを参照点として受信機をおき、そこでの観測データから未知点と参照点に共通な誤差を陽または陰に含む補正量を算出し、それを DGPS 補正データとして利用者受信機に送信する。これにより電離層遅延、対流圏遅延、SA 誤差、などが相殺できる(図 6.1)。しかし、両受信機で共通でない誤差(例えば、受信機雑音、マルチパス)は除去できない。一般に両点間の距離は 100 ~ 200 km 以内にあるのが望ましい。これ以上の距離では電離層・対流圏遅延量は無相関になり、また幾何学的な位置関係から軌道暦誤差も相殺できない。DGPS を実現する方式としては一般的に次の 4 つの考え方があ

- (1) 参照点の受信機で取得した観測データ(疑似距離、デルタレンジ)の誤差を推定し、それらを補正量としてなんらかの手段(通常無線)で利用者へ送信する(疑似距離方式)。
- (2) 参照点の受信機で取得した観測データから測位計算を行い、測量値との差を補正量として、なんらかの手段で利用者へ送信する(座標差方式)。
- (3) 参照点の受信機で取得した観測データをそのまま利用者へ送信し、利用者へ参照点との相対位置を計算させる(差引方式)。
- (4) 地上に設置した疑似衛星(pseudo-satellite または pseudolite)から、GPS 衛星と全く同様な航法信号を送信するとともに、(1)または(2)の DGPS 補正量も同時に送信する(pseudolite 方式)。

図 6.2 に疑似距離方式と座標差方式を示す。図中の記号 B, L, H は、それぞれ測地系座標である緯度、経度、標高である。

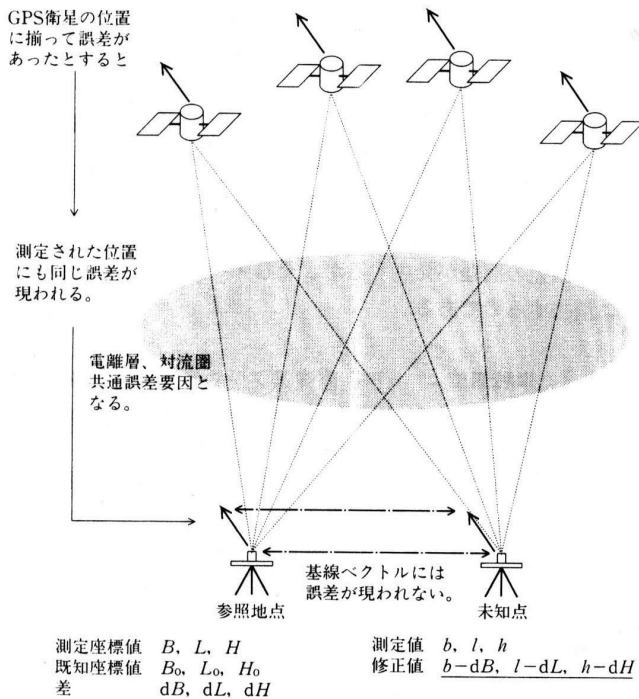


図 6.1 DGPS の原理

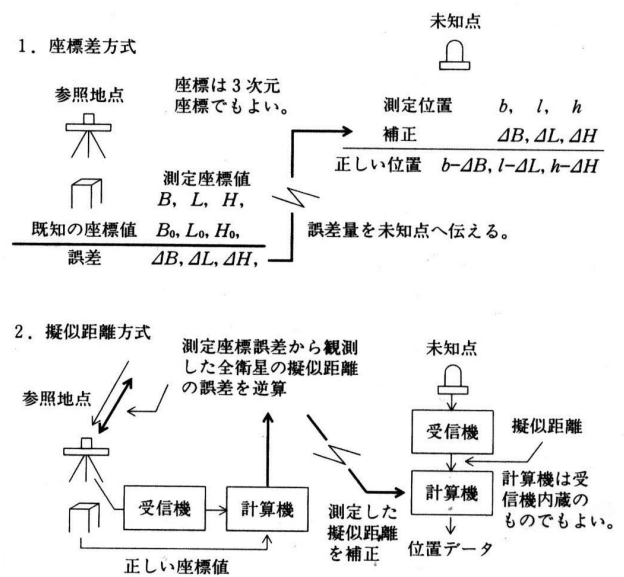


図 6.2 DGPS の方式

DGPS では、絶対位置ではなく相対位置がより精度良く決定される。例えば、スペースステーションを基準として、スペースシャトルの相対位置を DGPS で高精度に決定できる。一般的に(1) が実用的で精度も良いとされている。(2),(3)は概念的に理解しやすいが、参照点と利用者の受信機が同じ可視衛星の組み合わせから測位計算を行っていることが前提となっていることに注意しなければならない。(3)は宇宙でのランデブー・ドッキングや滑走路への進入着陸誘導への応用が考えられる。(4)は DGPS 機能に加えて、衛星配置が悪い場合でも、地上の疑似衛星と組み合わせることによって PDOP の向上を狙ったものである。機体運動や地形・建物による衛星電波の中断が見込まれる場合にも PDOP を良好に保つことができるので、航空機の進入着陸などに有力視されている。

本実験で行う DGPS には図 6.2 の疑似距離方式と座標差方式を用いる。DGPS に必要なデータ転送の方法には、FM 放送や携帯電話を用いる実時間方式と実時間性の無い後処理方式があるが、本実験では後者の方式で DGPS を行う。

7 実験

複数台の GPS 受信機を実際に使用して、GPS 衛星の軌道や自分の位置を測定する。GPS 受信機による基本的な測定結果は、付録 1 に示すライネックス(RINEX)と呼ばれる標準形式で得ることができる。計算は今までの説明から分かるように、計算桁の長い演算をする必要があり、倍精度変数の指定が不可欠である。止むをえず 8 桁長の計算機しか使えない場合は、その旨を記述のこと。以下に実験手順の概略を記すが、GPS 受信機その他の詳細については、実験当日に述べる。

7.1 実験 1

東工大内の適当な静止位置を GPS 測定する。2つのグループに分かれ、2台の GPS 受信機を用いる。測定場所、時刻、データ名、GPS 衛星の受信個数、衛星 PRN 番号、衛星方向（方位角と仰角）、受信信号状態、位置計測値などを記入すること。

1) Almanac の取得（インターネット配信）

適当な時刻を決めて、その時刻における衛星の概略軌道を計算し、配置図（図 2.1b）を描け。

2) 単独測位実験

2-1) Ephemeris の取得

適当な衛星を少なくとも 1 つ選び、1)で用いた時刻における位置座標を計算し、1)の結果と比較せよ。また、実験中において Ephemeris の更新を確認せよ。

2-2) 静止位置計測

- 計算に使用したデータ毎に、衛星個数と番号、疑似距離から、計測位置を WGS-84 系、日本測地系で求め、地図上にプロットせよ。
- 位置座標の時間変化図、位置座標の平均、水平方向の 2drms 、高さの標準偏差 σ を求めよ。
- 各補正係数の効果を調べよ。
- 可視衛星の自分の位置から見た方位角と仰角の軌跡図、距離の時間変化図を描け。

7.2 実験 2

東工大内の適当な場所で移動位置の GPS 測定を行う。2つのグループに分かれ、2台の GPS 受信機を用いる。測定場所、時刻、データ名、GPS 衛星の受信個数、衛星 PRN 番号、衛星方向（方位角と仰角）、受信信号状態、位置計測値などを記入すること。

2-3) 移動位置の GPS 測定

- a) 計算に使用したデータ毎に、衛星個数と番号、擬似距離から、計測位置を WGS-84 系、日本測地系で求め、位置座標の時間変化図を地図上にプロットせよ。
- b) 実際に動いた軌跡を記入し、計測結果の考察を行え。

3) DGPS 実験 (オプション)

3-1) 2 つの単独測位で得られた静止位置の GPS 計測データを用いて、GPS 受信機の 1 台の位置結果を参照地点とし、他方のデータを処理して DGPS 結果を求めよ。このときの位置座標の時間変化図、位置座標の平均、水平方向の 2drms、高さの標準偏差を求め、単独測位結果と比較せよ。

3-2) 2 つのグループに分かれ、東工大内の適当な位置を基準として、決められた時刻において、一方は静止して参照地点とし、他方は移動をしながら GPS 測定をせよ。DGPS 処理を行い、その結果得られる軌跡を地図上に描け。実際に移動した軌跡と比較し、測定精度等について検討せよ。

7.3 レポート

- 1) テキストの演習問題を解け。
- 2) 実験 1, 2 の得られた結果について考察せよ。
- 3) 本実験の感想を書き、GPS を用いた新しいシステムを提案せよ。

以上の処理には付録 1 の計算結果を参考にせよ。また、地図については、インターネットで入手することができる。(例えば、<http://www.mapoo.or.jp/>)

付録 1 ライネックス(RINEX)

ライネックス(RINEX)とは、受信機データ出力のための共通データフォーマットである。他に、DGPS 中心に利用されている RTCM と呼ばれる共通データフォーマットもある。

ライネックスファイルには、観測データ、航法メッセージ、気象観測の 3 種類がある。ライネックスファイル名は、MS-DOS の形式で ssssdddf.yyt と書かれる。sssdddf は、最大 8 文字のファイル名で、.yyt は拡張子 (extension) である。ライネックスでは慣用的に、sss: 測点名、ddd: 年初からの通算日、f: 観測のセッション番号、yy: 西暦年の下 2 桁、t: ファイルの種類、O: 観測データ、N: 航法メッセージ、M: 気象データとしてある。しかし、機種によっては異なる場合があるので注意すること。

付表 1.1 に航法メッセージ(RINEX ver. 2)、付表 1.2 に観測データを示す。また、付図 1.1 と 1.2 に実例を示す。形式はフォートラン(FORTRAN)に準拠している。すなわち、X が空白、A が文字列、I が整数、F が小数点付き数字、D は倍精度の小数点付き数字である。英文字前後の数字は繰り返しの数を表し、例えば、3A5 は、5 文字が 3 組ということである。観測データファイルは観測点毎に生成される。航法メッセージはどの点で受信したのも基本的には同じであるから、セッションごとに、どこかの点で採ったものが 1 個あればよい(但し、2 時間毎に更新される)。

付表 1.1 ライネックス航法メッセージファイルの内容

レコード番号 (先頭部分)	内容	フォーマット
------------------	----	--------

1	フォーマットのバージョン番号	I6, 14X
任意	ファイルの種類 “N” が航法メッセージ 注釈	A1, 19X A60
2	先頭部分の終了	60X
(データ部分)		
1	衛星の PRN 番号	I2
	時計の基準時刻 (t_c) (年月日時分秒)	5I3, F5.
	時計の補正係数 (a_0, a_1, a_2)	3D19.12
2	放送暦の年齢 (AODE) (s)	3X, D19.12
	軌道長半径補正のための sin 項 (Crs) (m)	D19.12
	平均運動の補正量 (Δn) (rad/s)	D19.12
	平均点離角 (M_0) (rad)	D19.12
3	u の補正のための cos 項 (Cuc) (rad)	3X, D19.12
	離心率 (e)	D19.12
	u の補正のための sin 項 (Cus) (rad)	D19.12
	軌道長半径の平方根 (\sqrt{a}) (\sqrt{m})	D19.12
4	放送暦の発行時刻 (GPS 週の経過秒) (t_e) (s)	3X, D19.12
	軌道傾斜角補正のための cos 項 (Cic) (rad)	D19.12
	昇交点経度 (ℓ_0) (rad)	D19.12
	軌道傾斜角補正のための sin 項 (Cis) (rad)	D19.12
5	軌道傾斜角 (i) (rad)	3X, D19.12
	軌道長半径補正のための cos 項 (Crc) (m)	D19.12
	近地点引数 (ω_0) (rad)	D19.12
	昇交点経度の変化率 ($\Omega \cdot \text{dot}$) (rad/s)	D19.12
6	軌道傾斜角の変化率 ($i \cdot \text{dot}$) (rad/s)	3X, D19.12
	L2 チャンネルのコード	D19.12
	GPS 週番号	D19.12
	L2P コードデータのフラグ	D19.12
7	衛星の精度と健康状態	3X, 2D19.12
	電離層群遅延時間 (s)	D19.12
	時計情報の年齢 (s)	D19.12
8	メッセージの発行時刻、3つの予備	3X, 4D19.12

```

2          NAVIGATION DATA          RINEX VERSION / TYPE
DAT2RIN 1.01      MatunagaLab      24AUG99 23:25:10 GMTPGM / RUN BY / DATE
                                     COMMENT
      .1676D-07   .2235D-07   -.1192D-06   -.1192D-06   ION ALPHA
      .1147D+06   .8192D+05   -.1311D+06   .6554D+05   ION BETA
      -.710542735760D-14   .000000000000D+00   319488   0 DELTA-UTC: A0,A1,T,W
      13                                     LEAP SECONDS
                                     END OF HEADER
1 99  8 23 16  0  0.0   .957739539444D-04   .136424205266D-11   .000000000000D+00
      .250000000000D+02   -.653437500000D+02   .435125267571D-08   -.640054465363D+00
      -.343658030033D-05   .471914268564D-02   .108461827040D-04   .515436211205D+04
      .144000000000D+06   -.633299350739D-07   .267575586173D+01   .111758708954D-07
      .958706099351D+00   .167062500000D+03   -.172500345195D+01   -.799104714490D-08
      .800033324599D-10   .100000000000D+01   .102400000000D+04   .000000000000D+00
      .700000000000D+01   .000000000000D+00   -.325962901115D-08   .281000000000D+03
      .136800000000D+06

```

付図 1.1 ライネックス航法メッセージファイルの実例

付表 1.2 ライネックス観測データファイルの内容

レコード番号 (先頭部分)	内容	フォーマット
1	フォーマットのバージョン ファイルの内容 “O” が観測データ 衛星の種類 “G” がGPS	I6, 14X A1, 19X A1, 19X
2	このファイルを作成したプログラム名 このファイルを作成した機関 ファイルした日付	A20 A20 A20
任意	注釈	A60
3	基準点の名称	A60
任意	基準点の番号	A60
4	観測者及び観測機関名	A20, A40
5	受信機番号、形式、バージョン	3A20
6	アンテナ番号、形式	2A20
7	アンテナの概算座標 (X, Y, Z)	3F14.4
8	アンテナの基準点からの偏心率 (H, E, N)	3F14.4
9	L1 及び L2 の波長係数 (1 が全波長)	2I6
10	観測量の種類の数 観測量の種類 (L は位相, C と P は擬似距離、D はドップラ)	I6 9 (4X, A2)
任意	観測データ間隔 (s)	I6
11	観測開始時刻 (年月日時分秒)	5I6, F12.6
任意	注釈	A60
12	先頭部分の終了	60X
(データ部分)		
1	観測時刻 (t_R) (年月日時分秒) フラグ (0 が良好、1 が電源の障害、2 以上は何かの出来事) 衛星数 衛星番号のリスト (衛星数が 12 以上の場合、次の行に続く) 受信機時計のオフセット量 (s) (任意)	5I3, F11.7 I3 I3 F12.9
2	5 つまでの観測量 (位相はサイクル, 擬似距離は m) LL1 (同期状態の指標) 信号強度	5 (F14.3, I1, I1)
(レコード 2 を衛星数分だけ繰り返す)		

```

2 OBSERVATION DATA RINEX VERSION / TYPE
DAT2RIN 1.01 MatunagaLab 24AUG99 23:24:49 GMTPGM / RUN BY / DATE
MatunagaLab MatunagaLab OBSERVER / AGENCY
5426 TRIMBLE 4000SSE Nav 7.29 Sig 3. 7 REC # / TYPE / VERS
0 4000ST INTERNAL ANT # / TYPE
END OF HEADER

99 8 23 13 41 0.0000000 0 6 1 3 6 17 22 25
87592.40500 21423145.89800 45920.21040 21423148.81640
-363614.40600 22978191.96100 -137364.28240 22978195.87540
286169.82300 23244288.47700 144126.71040 23244292.12140
-242795.23800 24398815.97700 -54124.12740 24398821.85940
-70094.36000 20698090.19500 -37948.25940 20698092.12940
35617.39600 20566878.39100 20171.86940 20566880.07840

```

付図 1.2 ライネックス観測データファイルの実例

付図 1.1 の値を用いると，PRN 番号が 1 の衛星の位置座標は次のように求めることができる。ただし，1999 年 8 月 23 日 13 時 41 分 0 秒における位置である。

$$\rho^1 = [-893779.888885 \quad 23210424.213676 \quad 9441090.883530]^T$$

付図 1.2 の疑似距離値および以下の GPS 衛星位置座標値など（実験時にファイルで配布する）を用いると受信機の位置および精度劣化率は次のようになる。ただし，衛星の基準時刻（ t_c ）は，1999 年 8 月 23 日 16 時 0 分 0 秒とする。

$$\rho^1 = [-8937799.888885 \quad 23210424.213676 \quad 9441090.883530]^T$$

$$\rho^3 = [-12336170.786617 \quad 23253725.837730 \quad -3631151.641878]^T$$

$$\rho^6 = [-13852963.588702 \quad -7158217.710521 \quad 21659645.951530]^T$$

$$\rho^{17} = [-25920820.720458 \quad -6560225.276940 \quad 2283702.669710]^T$$

$$\rho^{22} = [-7609088.098155 \quad 16201537.687581 \quad 19276924.250346]^T$$

$$\rho^{25} = [-19964098.280002 \quad 9885947.100843 \quad 14477775.239890]^T$$

受信機の位置（ECEF 系）：

$$\rho^R = [-3958809.540594 \quad 3359156.745741 \quad 3692431.703764]^T$$

$$\lambda = 139^\circ 41' 4.185573'' E, \quad \phi = 35^\circ 36' 6.872906'', \quad h = 110.717952$$

精度劣化率：

$$GDOP = 3.277338, PDOP = 2.810657, TDOP = 1.685572$$

付録 2 微分記号

1) スカラー関数 $f(x)$ を変数列 $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ で偏微分：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right] \quad (A2.1)$$

2) 関数列 $g(y) = [g_1(y), \quad g_2(y), \quad g_3(y)]^T$ をスカラー変数 y で偏微分：

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3(y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (A2.2)$$

3) 関数列 $g(x) = [g_1(x), \quad g_2(x), \quad g_3(x)]^T$ を変数列 $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ で偏微分：

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_3} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial g_3(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (A2.3)$$

参考文献

1. 日本測地学会編著,「新訂版 GPS - 人工衛星による精密測位システム - 」, 日本測量協会, 1989.
2. 土屋, 辻,「GPS 測定の基礎」, 日本測量協会, 1995.
3. 西村, 金井, 村田,「航空宇宙における誘導と制御, 第3部 新しい航法系技術 - GPS を中心として - 」, 計測自動制御学会, 1995.
4. B.Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins, GPS Theory and Practice, Third, revised ed., Springer-Verlag, Wien, 1994.
5. E. D. Kaplan, ed., Understanding GPS, Principles and Applications, Artech House Inc., Norwood, 1996.
6. B. W. Parkinson and J. J. Spilker Jr., eds, Global Positioning System: Theory and Applications, Vol. I & II, AIAA, Washington, DC, 1996.
7. 富田信之,「宇宙システム入門 ロケット・人工衛星の運動」, 東京大学出版, 1993.
8. 茂原正道,「宇宙システム概論 衛星の設計と開発」, 培風館, 1995.
9. 富田, 狼, 中須賀, 松永,「宇宙ステーション入門」, 東京大学出版, 2002.